数理解析研究所講究録 1329 巻 2003 年 167-172

L^2-TORSION OF A SURFACE BUNDLE OVER S^1

東工大・情報理工　北野晃朗 (Teruaki Kitano)
Tokyo Institute of Technology
東京農工大・工　森藤孝之 (Takayuki Morifuji)
Tokyo Univ. of Agriculture and Technology
東工大・情報理工　高沢光彦 (Mitsuhiko Takasawa)
Tokyo Institute of Technology

はじめに

コンパクトで向き付け可能な3次元多様体で基本群が無限群になるものを考えます。基本群のユニタリ表現を一つ固定する毎に、適当な条件の下で L^2-torsion と呼ばれる不変量が実数として定義されます。特に有限体積をもつ3次元双曲多様体に対して基本群の正則表現を取った場合、この L^2-torsion は双曲体積と本質的に等しいことが示されています。しかしながら，当然この不変量を具体的に計算することは一般には非常に困難です。

本研究では扱う対象を S^1 上の曲面束の構造をもつ3次元多様体に限ります。その上で、目標とするのは以下の二つです。

(i) τ(=体積) を近似していくような近似列を適当な表現を用いた L^2-torsion として構成する。

(ii) その不変量たちの極限として双曲体積をとらえる枠組みを与える。

L^2-torsion

L^2-torsion の一般論、詳しい定義等については、参考文献 [6] や [1], [3] を参照して下さい。

φ をモノドロミーとする S^1 上の曲面束を W_φ で表します。技術的な理由から、ファイバーは境界成分を一つもつコンパクトな曲面 $\Sigma_{g,1}$ とします。このとき W_φ の基本群 $\pi_1 W_\varphi$ は，ファイバーの基本群 $\pi_1\Sigma_{g,1} \cong F_{2g}$ (階数 $2g$ の自由群) と円周の基本群 $\mathbb{Z}$ との半直積に同型になります。より具体的に $F_{2g} = \langle x_1, \cdots, x_{2g}\rangle$ とすれば，$\pi = \pi_1 W_\varphi$ の表示として次が得られます:

$$\pi = \left\langle x_1, \cdots, x_{2g}, t \mid r_i = t x_i t^{-1} \left(\varphi_*(x_i)\right)^{-1},\ 1 \leq i \leq 2g \right\rangle .$$

ここで $\varphi_* : \pi_1\Sigma_{g,1} \to \pi_1\Sigma_{g,1}$ は、φ から誘導される準同型写像を表します。関係子 $r_1, \cdots, r_{2g}$ に自由微分を施すことにより、Alexander-Fox 行列

$$A = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in M(2g, \mathbb{Z}\pi)$$

が得られます。この場合に基本群の正則表現に対応する W_φ の L^2-torsion $\tau(W_\varphi)$ を Lück の公式 ([6], Theorem 4.9) を用いて具体的に書き下すと次のようになります:

$$\log \tau(W_\varphi) = -2 \log \det_{\mathbb{C}\pi}(A).$$

ここで, $\det_{\mathbb{C}\pi}$ は通常とは異なる行列式で、Fuglede-Kadison 行列式とよばれているものです。非可換環 (π の $\mathbb{C}$ 上の群環 $\mathbb{C}\pi$) 係数の行列に対して正の実数として定義されるます。

詳細は省略しますが、この行列式は非可換環上の無限級数を使って定義されます。そのため、無条件に定義されるわけではなく、二つの条件：

- L^2-Betti 数の消滅、
- Novikov-Shibin 不変量の正値性、

が必要です。

Lück の公式は、いわばファイバーの基本群へのモノドロミーの作用から W_φ の L^2-torsion（双曲的体積）を具体的に書き下した公式という事が出来ます。そこで、以下のようにして L^2-torsion τ の近似列を構成する事を考えます。

自由群 $\Gamma = F_{2g}$ の降中心化列

$$\Gamma_1 = \Gamma \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_k \supset \cdots$$

を考えます。ただし $\Gamma_{k+1} = [\Gamma_k, \Gamma_1]$ で定義します. さらに Γ の冪零商 $N_k = \Gamma/\Gamma_k$ および自然な射影 $p_k : \Gamma \to N_k$ を考えます。p_k から誘導される群環上の写像 $p_{k*} : \mathbb{C}\pi \to \mathbb{C}\pi(k)$ を用いて

$$A_k = \left(p_{k*}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right) \in M(2g, \mathbb{C}\pi(k))$$

とします. ここで, $\pi(k)$ は商群 π/Γ_k を表します。そこで k 番目の L^2-torsion を

$$\log \tau_k(W_\varphi) = -2 \log \det_{\mathbb{C}\pi(k)}(A_k)$$

により「定義」します。つまり、曲面群の降中心化列へのモノドロミーの作用を見ることにより，もとの L^2-torsion を近似する不変量の無限列を構成するわけです。その構成の仕方から，このように「定義」された不変量 (体積もどき) たちは、素朴な意味でもとの L^2-torsion を近似していると考えられます。以上をまとめると次の予想が得られます。

予想 1. すべての $k \geq 1$ に対して $\log \tau_k$ は well-defined であり

$$\lim_{k\to\infty} \log \tau_k = \log \tau$$

が成り立つ。

最近の進展

この予想の τ_k の well-definedness に関わる部分に関して、最近解析的な側面での進展が Schick [7] によってなされました。

問題は Fugelede-Kadison 行列式について次の 2 つの条件：

(i) L^2-Betti 数の消滅、

(ii) Novikov-Shubin 不変量の正値性

でした。

一般に L^2Betti 数の消滅に関しては、比較的容易に示され、問題になるのは Novikov-Shubin 不変量の正値性に関してでした。しかし、実は Novikov-Shubin 不変量に関する条件は、より弱い条件に置き換えられる事が知られていました。ここで Schick はある群のクラスを定義しました。このクラスは全てのアーベル群、アメナブル群などを含みます。この群のクラスに含まれている群に関しては、その群環上考える限りにおいては、L^2-Betti 数の消滅しているとき、上での述べた Novikov-Shubin 不変量の正値性に代わる条件が常に満たされる事を Schick は証明しました。従いまして、Fuglede-Kadison 行列式の well-definedness が、L^2-Betti 数の消滅のみで判定できることになりました。

これを用いると、我々の定義した τ_k は全て well-defined となります。従って問題となるのは、収束性に関してです。

注意 2. ファイバーが閉曲面 Σ_g の場合，対応する曲面束 $W_{\bar{\varphi}}$ は，Heegaard 分解からくる基本群の表示として

$$\pi_1 W_{\bar{\varphi}} = \langle x_1, \cdots, x_{2g}, t \mid r_i = 1,\ [x_1, x_{g+1}] \cdots [x_g, x_{2g}] = 1 \rangle$$

を持ちます．この場合のLückの公式は，形式的には境界をもつ場合と全く同じ形になりますが、Fuglede-Kadison 行列式をとる際の係数環が変わり，その値は境界付きの場合と一般には異なります。この場合にも同様の定義を考えることは可能です。

いくつかの公式

前節で導入した不変量の系列のうち，最初の二項については公式を与えることができていました。

定理 3. $\varphi_* \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2g} \in \mathbb{C}$ とすると

$$\log \tau_1(W_\varphi) = -2 \sum_{i=1}^{2g} \log \max\{1, |\alpha_i|\}$$

が成り立つ。

系 4. ホモロジー表現 $\varphi_* \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の固有値がすべて 1 の冪根である必要十分条件は

$$\log \tau_1(W_\varphi) = 0$$

で与えられる。

種数 1 の場合には，曲面束が双曲構造を許容するかどうかの情報が、一番目の不変量に完全に反映されることがわかります。

二番目の不変量については，種数が 1 のときとそれ以上の場合とで、振る舞いが大きく異なります。

まず種数が 1 の場合、閉曲面 Σ_1 から構成された曲面束に対する Lück の公式に帰着させることにより次がわかります。

定理 5. ファイバーの種数が 1 の曲面束 W_φ に対して。$\log \tau_2(W_\varphi) = 0$ が成り

一方でファイバーの種数が2より大きい場合、具体例を構成する事により τ_2 は非自明であることがわかります。

またもし、τ_1 のみを考えるならば、ファイバー束の構造がなくても、多様体 M に対して、その基本群から $\mathbb{Z}$ への全射準同型写像

$$\pi_1(M) \to T \cong \mathbb{Z}$$

が、存在すれば定義可能です。例えば、結び目の外部などがそうです。この場合 τ_1 は古典的な結び目の不変量である Alexander 多項式と結びつきます。

さらに次の事が成り立ちます。まず、素数 $n \geq 2$ を一つ固定します。$W_{\varphi^n} \to W_\varphi$ をモノドロミーを n 乗する事で得られる、W_φ の n 重巡回被覆とします。この時、$\mathrm{ord}(\varphi, n)$ を商群 $H_1(W_{\varphi^n}, \mathbb{Z})/\langle t \rangle$ の位数とします。もし、位数が無限大の時は、$\mathrm{ord}(\varphi, n) = 0$ と定義します。

ここで次の自然な準同型写像を考える事により、

$$\pi_1(W_\varphi) \to \pi(1) = T = \langle t \rangle \ni t \mapsto \bar{t} \in \bar{T}^{(n)} := \langle \bar{t} \mid \bar{t}^n \rangle,$$

この場合、$\mathbb{C}\bar{T}^{(n)} = l^2(\bar{T}^{(n)}) \cong \mathbb{C}^n$ は有限次元であることから、L^2-torsion $\tau_1^{(n)}(W_\varphi)$ が定まります。

定理 6. このとき、次が成立する。

(i) $\log \tau_1^{(n)}(W_\varphi) = -\dfrac{2}{n} \log \mathrm{ord}(\varphi, n)$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \log \tau_1^{(n)}(W_\varphi) = \log \tau_1(W_\varphi)$.

References

[1] 北野晃朗，高沢光彦，森藤孝之, *L^2-torsion of a surface bundle over S^1 and a hyperbolic volume*, 数理解析研究所講究録 No. 1223 (2001), 93–106.

[2] 北野晃朗，高沢光彦，森藤孝之, *L^2-torsion of a surface bundle over S^1 and a hyperbolic volume (II)*, 数理解析研究所講究録 No. 1270 (2002), 24–28.

[3] T. Kitano, T. Morifuji and M. Takasawa, *L^2-torsion invariants of a surface bundle over S^1*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[4] T. Kitano, T. Morifuji and M. Takasawa, *A numerical calculation of L^2-torsion invariants*, Interdiscip. Inform. Sci., Vol 9, No. 1 (2003).

[5] T. Kitano, T. Morifuji and M. Takasawa, *L^2-torsion invariants and homology growth of a torus bundle over S^1*, Proc. Japan Acad., Vol 79, Ser A, No. 4 (2003).

[6] W. Lück, *L^2-invariants: Theory and Applications to Geometry and K-theory*, Springer (2002).

[7] T. Schick, *L^2-determinant class and approximation of L^2-Betti numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001).